第23講　ベクトルの利用法

23　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の2点をA(2, 4)，C(6, 3)とする．点PがCを中心とする半径2の円周上を動くとき，APの長さを最小にする点Pの座標を求めよ．

(2)　平面上の点をB(−4, 3)とし，$3x+4y-25\geqq 0$で表される領域をDとする．点P(x, y)が領域D内を動くとき，BPの長さが最小となるような点Pの座標を求めよ．

(3)　原点Oと異なる点Q(X, Y)に対して，点PはOを端点とする半直線OQ上にあり，OP×OQ＝$r(>0)$を満たしているとする．このとき点Pの座標を求めよ．

(4)　空間の2点をA(5, 3, 7)，C(8, 1, 9)とする．点PがCを中心とする半径2の球面上を動くとき，APの長さを最小にする点Pの座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　ベクトルの利用法

23　次の各問いに答えよ．

(1)　xy 平面上で，直線 $l：ax+by+c=0$ として，l 上にない点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする．P から l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2)　空間の点 (10, 9, 8) を中心とする半径 7 の球面を S_1 とし，点 (6, 5, 4) を中心とする半径 3 の球面を S_2 とする．S_1 上の点を P，S_2 上の点を Q とするとき，線分 PQ の長さが最大になるような点 P と Q の座標を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$\mathrm{H}\left(p+\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q+\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

㋑　$\mathrm{H}\left(p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

㋒　$\mathrm{H}\left(q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

(2)　㋐　$\mathrm{P}\left(6-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 5-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 4-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(10+\sqrt{3},\ 9+\sqrt{3},\ 8+\sqrt{3})$

㋑　$\mathrm{P}\left(10-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(6+\sqrt{3},\ 5+\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3})$

㋒　$\mathrm{P}\left(10+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8+\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(6-\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3})$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　ベクトルの利用法

23　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の 2 点を A(2, 4)，C(6, 3) とする．点 P が C を中心とする半径 2 の円周上を動くとき，AP の長さを最小にする点 P の座標を求めよ．

(2)　平面上の点を B(−4, 3) とし，$3x+4y-25\geqq 0$ で表される領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，BP の長さが最小となるような点 P の座標を求めよ．

(3)　原点 O と異なる点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ に対して，点 P は O を端点とする半直線 OQ 上にあり，$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=r(>0)$ を満たしているとする．このとき点 P の座標を求めよ．

(4)　空間の 2 点を A(5, 3, 7)，C(8, 1, 9) とする．点 P が C を中心とする半径 2 の球面上を動くとき，AP の長さを最小にする点 P の座標を求めよ．

【答】 (1) $\mathrm{P}\left(6-\dfrac{8}{\sqrt{17}},\ 3+\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right)$　(2) P(−1, 7)　(3) $\mathrm{P}\left(\dfrac{rX}{X^2+Y^2},\ \dfrac{rY}{X^2+Y^2}\right)$

(4) $\mathrm{P}\left(8-\dfrac{6}{\sqrt{17}},\ 1+\dfrac{4}{\sqrt{17}},\ 9-\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$

【解答】

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(-4,\ 1)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{17}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{2}{\sqrt{17}}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(6-\dfrac{8}{\sqrt{17}},\ 3+\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right)$

ゆえに $\mathbf{P}\left(\mathbf{6-\dfrac{8}{\sqrt{17}},\ 3+\dfrac{2}{\sqrt{17}}}\right)$

(2)　直線 $3x+4y-25=0$ の法線ベクトルは (3, 4) より，求める点は

$(x,\ y)=(-4,\ 3)+k(3,\ 4)=(3k-4,\ 4k+3)$ と表せる．

この点が直線 $3x+4y-25=0$ 上にあるので，$3(3k-4)+4(4k+3)-25=0$　∴　$k=1$

よって求める点は **P(−1, 7)**

(3)　原点 O に関して P と Q は同じ方向より $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{r}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　（$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=r$ より）

ゆえに $\mathbf{P}\left(\dfrac{\boldsymbol{rX}}{\boldsymbol{X^2+Y^2}},\ \dfrac{\boldsymbol{rY}}{\boldsymbol{X^2+Y^2}}\right)$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(-3,\ 2,\ -2)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{17}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{2}{\sqrt{17}}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(8-\dfrac{6}{\sqrt{17}},\ 1+\dfrac{4}{\sqrt{17}},\ 9-\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$

ゆえに $\mathbf{P}\left(\mathbf{8-\dfrac{6}{\sqrt{17}},\ 1+\dfrac{4}{\sqrt{17}},\ 9-\dfrac{4}{\sqrt{17}}}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　ベクトルの利用法

23 次の各問いに答えよ．

(1) xy 平面上で，直線 $l：ax+by+c=0$ として，l 上にない点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする．P から l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2) 空間の点 $(10,\ 9,\ 8)$ を中心とする半径 7 の球面を S_1 とし，点 $(6,\ 5,\ 4)$ を中心とする半径 3 の球面を S_2 とする．S_1 上の点を P，S_2 上の点を Q とするとき，線分 PQ の長さが最大になるような点 P と Q の座標を求めよ．

【選択肢】

(1) ㋐ $\mathrm{H}\left(p+\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q+\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

㋑ $\mathrm{H}\left(p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

㋒ $\mathrm{H}\left(q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

(2) ㋐ $\mathrm{P}\left(6-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 5-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 4-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(10+\sqrt{3},\ 9+\sqrt{3},\ 8+\sqrt{3})$

㋑ $\mathrm{P}\left(10-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(6+\sqrt{3},\ 5+\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3})$

㋒ $\mathrm{P}\left(10+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8+\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(6-\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3})$

【答】 (1) ㋑　(2) ㋒

【解答】

(1) 直線 l の法線ベクトルの 1 つを $\vec{u}=(a,\ b)$ とすると，$\mathrm{PH}\perp l$，$l\perp\vec{u}$ より，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\vec{u}$ したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(p+ka,\ q+kb)$ と表せる．これを l の式に代入して

$a(p+ka)+b(q+kb)+c=0$ よって $k=-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}$ を得る．

ゆえに，$\boldsymbol{\mathrm{H}\left(p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)}$

(2) $\mathrm{A}(10,\ 9,\ 8)$，$\mathrm{B}(6,\ 5,\ 4)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(4,\ 4,\ 4)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=4\sqrt{3}$ であり，

$7-3=\sqrt{16}<4\sqrt{3}=\sqrt{48}<\sqrt{100}<7+3$ より S_1 と S_2 は共有点をもつ．

よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{7}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{3}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(10+\frac{7}{\sqrt{3}},\ 9+\frac{7}{\sqrt{3}},\ 8+\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{3}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(6-\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3})$$

のとき PQ の長さが最大となる．

ゆえに，$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(10+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8+\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)}$，$\boldsymbol{\mathrm{Q}(6-\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3})}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。